NOTIONS DE LOGIQUE

0.1 Proposition-Fonction Propositionnelle

Définition 0.1.1. .
Une proposition logique est un énoncé formée d'un assemblage de symboles et de mots, portant sur des objets mathématiques, à laquelle on peut clairement attribuer la valeur vraie ou la valeur faux. On note P une proposition.

Par définition P satisfait les 3 principes suivants :
– • Principe d'identité : P est P.
Autrement dit si P est vrai alors P est vraie et si P est fausse alors P est fausse.
– • Principe de non contradiction : P ne peut pas à la fois être vraie et fausse.
– • Principe du tiers exclus : soit P est vraie, soit P est fausse.
Il n'existe pas d'autre valeur de vérité en logique mathématique. Ces trois principes constituent le fondement de tout raisonnement mathématique.

Exemple 0.1.1. *P : " Le nombre de lettres dans l'alphabet arabe est 10. "*
La proposition P est fausse.

Q : " 2+2=4 "
La proposition Q est vraie.

C : " x>1 "

C n'est pas une proposition logique complète car elle contient une variable libre x. On ne sait pas ce qu'est x (un point ? un nombre entier ? un vecteur ? une étoile de l'univers ?). On ne peut donc pas attribuer de valeur de vérité à la proposition C.
C' : " Soit x un nombre réel, alors $x > 1$ " La proposition C' est fausse. En effet C' est une proposition logique car on a défini la variable x comme étant un nombre réel. Mais elle est fausse car par exemple 0 est un nombre réel et $0 < 1$.
On utilise ici un contre exemple pour prouver que la proposition C' est fausse. Ce type de raisonnement sera approfondi dans la dernière partie.
À retenir
Les propositions logiques ne peuvent prendre que deux valeurs : VRAI ou FAUX.
Il faut bien faire la distinction entre une proposition (qui est une phrase) et sa valeur (qui est soit VRAI soit FAUX).

Définition 0.1.2. *Soit E un ensemble. Pour un élément x de E, on note $P(x)$ une proposition dont la valeur logique dépend dúne variable notée x. $P(x)$ est appelé foction propositionnelle (un prédicat). Par exemple, pour $E = \mathbb{R}$, la fonction propositionnelle $P(x) : x > 0$ est vrai pour la valeur $x = 1$, et faux pour la valeur $x = -1$.*

0.2 Connecteurs logiques

Les propositions sont les atomes en logique. A partir d'une, deux ou plusieurs propositions on peut créer de nouvelles propositions à l'aide de connecteurs logiques. Nous allons définir les règles pour les cinq connecteurs -non-,-et-,-ou-, -si : : : alors- et -si et seulement si-.

Définition 0.2.1. *(Négation, -non-) La négation d'une proposition est une proposition qui est vraie si celle-ci est fausse et vice-versa.*

Notation $\neg$.

La table de vérité de la négation est la suivante :

P	$\neg P$
V=1	F=0
F=0	V=1

Exemple 0.2.1. *Si P est : "l'entier n est pair"*
$\neg P$ devient : "l'entier n est impair"

Remarque 0.2.1. $\neg(\neg P)$ *a même valeur logique que* P

Définition 0.2.2. *(Conjonction, 'et')*
La conjonction de deux propositions est une proposition qui est vraie si les deux propositions sont simultanément vraies. Elle est fausse dès que l'une au moins des deux propositions est fausse.

Notation :$\wedge$

La table de vérité de la conjonction est la suivante :

p	q	$p \wedge q$
V=1	F=0	F=0
F=0	V=1	F=0
V=1	V=1	V=1
F=0	F=0	F=0

Exemple 0.2.2. *P : " 5 est un nombre inférieur à 10 'et' 5 est pair "*
Soit Q : " 5 est un nombre inférieur à 10 " Q est vraie
Soit R : " 5 est pair " R est fausse
La proposition P est la proposition " $Q \wedge R$ "
D'après la table de vérité de l'opérateur binaire "et", on en déduit que la proposition P est fausse.
S : "La lettre A est une voyelle et T est une consonne."
En résonnant de même, on en déduit que la proposition S est vraie.

Définition 0.2.3. *(Disjonction)*
La disjonction de deux propositions est une proposition qui est vraie dès que l'une au moins des deux propositions est vraie. Elle est fausse si les deux propositions sont simultanément fausses.

Notation : $\vee$

La table de vérité de la disjonction est la suivante :

p	q	$p \vee q$
V=1	F=0	V=1
F=0	V=1	V=1
V=1	V=1	V=1
F=0	F=0	F=0

Exercice 1 :
On considère la proposition P : «7 est un nombre inférieur à 11 OU 7 est pair »
Quelle est la valeur de vérité de cette proposition ?

Correction :
Soit Q : « 7 est un nombre inférieur à 11 ». Q est vraie
Soit R : « 7 est pair ». R est fausse
La proposition P est la proposition "$Q \vee R$ »
D'après la table de vérité de l'opérateur « OU », la proposition P est vraie

Remarque 0.2.2. *Les opérateurs binaires « NON », « ET », et « OU » notés respectivement « $\neg$ » «$\wedge$ » et «$\vee$» sont les plus importants en mathématiques car ils permettent de définir tous les autres opérateurs.*

Définition 0.2.4. *(Implication, Conditionnelle, ' si : : : alors') Si P et Q sont deux propositions, alors l'implication "si P alors Q" est une proposition qui est vraie si P est faux, ou bien si P et Q sont simultanément vrais.*
Cette implication est fausse uniquement si l'antécédant P est vrai et le conséquent Q faux.

Notation : $\Rightarrow$

La table de vérité de l'implication est la suivante :

p	q	$p \Rightarrow q$
V=1	F=0	F=0
F=0	V=1	V=1
V=1	V=1	V=1
F=0	F=0	V=1

Exemple 0.2.3. *Prenons un exemple de relation d'implication : « Il pleut. » $\Rightarrow$ « Le sol est mouillé. ».*
Cette proposition est vraie s'il suffit qu'il pleuve pour que le sol soit mouillé. Mais attention si le sol est mouillé il ne pleut pas forcément (le fleuriste peut avoir vidé un sceau d'eau sur le sol).
Il est important de bien comprendre cette notion. On suppose vraie l'implication précédente.S'il pleut alors le sol est mouillé.
En revanche si le sol est mouillé, il est impossible de prévoir s'il pleut ou non.

Remarque 0.2.3. *Si P est fausse, $P \Rightarrow Q$ est vraie.*
$P \Rightarrow Q$ n'a pas même valeur logique que $Q \Rightarrow P$.
Par exemple, pour $x \in \mathbb{R}, (x = 1) \Rightarrow x > 0)$ est une proposition vraie, mais $(x > 0) \Rightarrow x = 1)$ est une proposition fausse.

Plusieurs formulations pour une même notion
$P \Rightarrow Q$ se lit aussi :
– • Si P alors Q
– • Il suffit que P pour que Q
– • Il est nécessaire que Q pour que P
– • Il faut que Q pour que P

0.2.1 Syllogisme

le syllogisme est un raisonnement logique à deux propositions (également appelées prémisses) conduisant à une conclusion qu'Aristote a été le premier à formaliser. On peut utiliser nos connaissances sur l'implication pour construire un raisonnement appelé syllogisme.
Soient P et Q deux propositions.Pour montrer que Q est vraie, on utilise la règle suivante :
Si P est vraie et si $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors Q est vraie.
De la table de vérité de l'implication, On remarque que les conditions initiales (P est vraie et $P \Rightarrow Q$ est vraie) on déduit que Q est aussi vraie. Ce qui prouve que notre raisonnement est correct.

Exemple 0.2.4. *:*
Socrate est un homme.
Tous les hommes sont mortels. (C'est à dire « Être un homme. » ? « Être mortel. »)
Donc Socrate est mortel.

Vous le voyez, le syllogisme est un raisonnement plutôt intuitif.
Il était souvent utilisé par les grecs de l'antiquité, d'où l'exemple de Socrate.

0.2.2 Implication réciproque

Encore un petit quelque chose. P et Q sont toujours deux propositions.
La proposition $Q \Rightarrow P$ est appelée l'implication réciproque de la proposition $P \Rightarrow Q$.

Définition 0.2.5. *(Equivalence, ' si et seulement si') Si P et Q sont des propositions, alors l'équivalence 'P si et seulement si Q' est une proposition qui signifie (P si Q) et (P seulement si Q). La valeur de vérité de l'équivalence 'P si et seulement si Q' est la valeur de vérité de $(Q \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow Q)$. L' équivalence 'P si et seulement si Q' est donc vraie uniquement si P et Q ont la meme valeur de vérité.*

Notation : $\Leftrightarrow$. La table de vérité de l'équivalence est la suivante :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V=1	F=0	F
F=0	V=1	F=0
V=1	V=1	V=1
F=0	F=0	V=1

Remarque 0.2.4. *Pour démontrer une équivalence, on utilise souvent la règle de la double implication :*
• *on démontre dans un premier temps une implication.*
• *puis dans un second temps on démontre l'implication réciproque.*
On en déduit que l'équivalence est vérifiée.

Exemple 0.2.5. *A, B et C sont trois propositions.*
$A \Leftrightarrow A$ (Évident, c'est le principe d'identité, que l'on a évoqué au début de ce cours)
$\neg\neg A \Leftrightarrow A$ (Principe du tiers exclus, aussi évoqué au début de ce cours)
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$ (On dit que l'équivalence est symétrique)
$(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ (On dit que l'équivalence est transitive)

0.3 Les quantificateurs-Propositions quantifiées

0.3.1 Le quantificateur universel

On note « pour tout x élément de $\mathbb{E}$, la proposition $P(x)$ est vraie » ainsi « $\forall x \in \mathbb{E}, P(x)$».
C'est quoi tous ces symboles ?!
• Le symbole $\forall$ se lit "quelque soit". C'est un quantificateur, il indique que la propriété est vraie pour tous les objets satisfaisants la condition qui suit.
• x est un objet mathématique (un nombre, un point, un vecteur...).
• Le symbole $\in$ signifie « appartient à ». C'est un opérateur qui permet de dire que x appartient à un ensemble précisé.
• $\mathbb{E}$ est un ensemble d'objets. Par exemple le plan qui est un ensemble de points, ou bien l'ensemble $\mathbb{R}$ qui est l'ensemble des nombre réels.

Exemple 0.3.1. *1 On nomme $\mathbb{A}$ l'ensemble des élèves d'une classe.*
On note $P(x)$: « x est présent » (x est un élève de la classe)
La proposition Q : « Tous les élèves de la classe sont présents » s'écrit alors $\forall x \in \mathbb{A}, P(x)$

Exemple 0.3.2. *2 On nomme $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.*
La proposition Q' : « Le carré d'un nombre réel est toujours positif » s'écrit alors
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

0.4 Exercices

Traduire la proposition sous sa forme mathématique équivalente (en utilisant le quantificateur et le connecteur logique adéquat).
P : « Pour tout x nombre réel, il suffit que x soit supérieur ou égal à 5 pour que x^2 soit supérieur ou égal à 25 »
Correction :
La formulation « il suffit que P soit vraie pour que Q soit vraie » se traduit par $P \Rightarrow Q$
Cette équivalence est vraie pour tout x nombre réel, on utilise donc le quantificateur $\forall$.
La proposition P s'écrit donc $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 5 \Rightarrow x^2 \geq 25$.

0.5 Le quantificateur existenciel

Reprenons notre premier exemple.
La proposition Q : « Tous les élèves de la classe sont présents ». Essayez de déterminer $\neg Q$
Attention ! Il y a un piège !
Le contraire de « Tous les élèves de la classe sont présents » n'est pas « Tous les élèves de la classe sont absents » !
En effet, il suffit qu'un seul élève soit absent pour que la proposition Q soit fausse.
On dira donc que la proposition contraire de Q est « Au moins un élève de la classe est absent »
Il nous faut un autre quantificateur pour traduire « il existe au moins un ». On pourrait noter ce quantificateur $\neg\forall$, car il est simplement la négation du quantificateur universel. Mais pour simplifier la notation, on utilisera le symbole $\exists$.
$\exists$ s'utilise exactement de la même façon que $\forall$.

Exemple 0.5.1. *P : « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$ »*
La proposition P se lit « Il existe au moins un nombre réel x dont le carré est égal à 1. ».

Voyez comme la notation mathématiques est plus pratique !

Exemple 0.5.2. *Désigner par une croi la case correspondante*

Prposition	*Vraie*	*Fausse*
$\exists x \in \mathbb{R}\ x^2 = -1$		
$\exists x \in \mathbb{Z}\ \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}$		
$\exists! x \in [0, \pi]\ \cos x = \frac{1}{2}$		
$\exists! x \in \mathbb{R}\ x^2 = 4$		
$\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 \geq 0$		
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}\ x - y = 1$		

0.5.1 Plusieurs quantificateurs

On peut utiliser deux quantificateurs (ou plus) dans une même proposition. Dans ce cas l'ordre des quantificateurs est important.
Exercice
Traduisez en français les proposition $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ et donnez leur valeur de vérité :

$$P(x,y) : \forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x < y$$
$$Q(x,y) : \exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, x < y$$

Pour rappel $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombre entiers positifs : 0, 1, 2, 3...
Ces deux propositions si proches en apparence n'ont donc absolument rien à voir !
Retenez donc que changer la nature ou l'ordre des quantificateurs change le sens de la proposition.

0.5.2 Négation d'une proposition quantifiée

La négation de la proposition $\big(\forall x \in \mathbb{E}\ P(x)\big)$ est la proposition $\big(\exists x \in \mathbb{E}\ \neg P(x)\big)$.
La négation de la proposition $\big(\exists x \in \mathbb{E}\ P(x)\big)$ est la proposition $\big(\forall x \in \mathbb{E}\ \neg P(x)\big)$.
La négation de la proposition $(\forall x \in \mathbb{E})\ (\forall y \in \mathbb{F})\ Q(x,y)$ est la proposition $(\exists x \in \mathbb{E})\ (\exists y \in \mathbb{F})\ \neg Q(x,y)$.
La négation de la proposition $(\forall x \in \mathbb{E})\ (\exists y \in \mathbb{F})\ Q(x,y)$ est la proposition $(\exists x \in \mathbb{E})\ (\forall y \in \mathbb{F})\ \neg Q(x,y)$.

Exemple 0.5.3. *Donner la négation de la proposition suivante :*
$P(x,y,z)$ *:* $(\forall z > 0)\ (\exists x \in]0,1[)\ (\exists y \in]0,1[)\ x^2 + y^2 < z$

Exercices
(i)On vous propose deux raisonnements utilisant l'équivalence logique ;sachez qu'un des deux raisonnement est faux,il est demandé de le reconnaitre .
1)-Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+3} \geq 2 &\iff x^2+3 \geq 4. \\ &\iff x^2 \geq 1 \\ &\iff x \geq 1 \end{aligned}$$

2)-Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} \geq 2 &\iff x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0 \\ &\iff \frac{x^2+1-2x}{x} \geq 0 \\ &\iff \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0 \end{aligned}$$

0.5.3 Loi logique

Définition 0.5.1. *On appelle loi logique toute proposition formée de plusieurs propositions (P,Q,R,...) connectées par des opérateurs logique et qui est toujours vraie indépendament des valeurs logiques des propositios P,Q,R,...*

Activité
Montrer que les propostions suivantes sont des lois logiques.
$\big(P \wedge (P \Longrightarrow Q)\big) \Longrightarrow Q$; $P \Longleftrightarrow \overline{\overline{P}}$; $P \vee \overline{P}$
$[(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$

Remarque 0.5.1. *On a $\big(P \wedge (P \Longrightarrow Q)\big) \Longrightarrow Q$ une loi logique et qui est dite le principe générale du raisonnement déductif*
Pour montrer que la proposition Q est vraie, on procède comme suit :
On montre que l'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie dont P est vraie, puis on en déduit que la proposition Q est vraie.

0.5.4 LOIS DE MORGAN

Les propositions suivantes sont des lois logiques :

- $\overline{(P \wedge Q)} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q} \quad \overline{(P \vee Q)} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$
- $P \vee (Q \wedge R) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
- $P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

Applications
Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

Exercice
Donner la négation des propositions suivantes :
$\forall x \in \mathbb{R} :\ x + 1 \geq 0 \vee x^2 - 1 < 0$
$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall y \in \mathbb{R} \qquad (x, y) \in [0, 1] \Longrightarrow 0 \leq \frac{x+y}{1+xy} \leq 1$

0.5.5 Loi d'équivalence suuccessive

La proposition : $\big[(P \Longleftrightarrow Q) \wedge (Q \Longleftrightarrow C)\big] \Longrightarrow (P \Longleftrightarrow C)$ est une loi logique
Résultat : Raisonnement par les équivalences successives
On en déduit de cette loi logique que si $(P \Longleftrightarrow Q)$ et $(Q \Longleftrightarrow C)$ alors $(P \Longleftrightarrow C)$ est vraie
Exercice
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
Montrer que $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Longleftrightarrow (x, y) = (2, 8)$

0.5.6 Loi de l'implication contraposée

La proposition : $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$ est une loi logique.

Remarque 0.5.2. *Souvent, il est difficille de montrer l'implication $P \Longrightarrow Q$, alors il suffit de montrer que $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$, puis déduir que $P \Longrightarrow Q$*
Cette démonstration est appellée le raisonnement par contraposée.

Exercice
Soit $x \in \mathbb{R}$
Montrer que $x \neq -8 \Longrightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$

0.5.7 Conséquence

La proposition $(P \iff Q) \iff (\overline{P} \iff \overline{Q})$ est une loi logique.

0.5.8 Exemple et contre exemple

Pour montrer qu'une proposition de la forme $\exists x \in \mathbb{E}, P(x)$ est vraie, on cherche un x pour lequel $P(x)$ est vraie. C'est donner un exemple.
Exercice :
P : « $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N},\ x^2 = y^2 + z^2$»
Démontrez que P est vraie.
Pour montrer qu'une proposition de la forme $\forall x \in \mathbb{E}/P(x)$ est fausse, on montre que sa négation $\exists x \in \mathbb{E}/\overline{P(x)}$ est vraie. C'est donner un contre-exemple.
Exercice :
Soit P la proposition «$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ est un nombre premier »
Démontrez que P est fausse.

0.5.9 Le raisonnement par l'absurde

Ce raisonnement repose sur le principe du Tiers-exclus, à savoir que si une proposition n'est pas fausse, alors elle est vraie.
Imaginons par exemple que vous savez que quelque chose est vrai, mais vous ne savez pas le démontrer. En raisonnant par l'absurde vous allez commencer par admettre par hypothèse que cette chose est fausse. Puis en suivant les règles de la logique vous allez développer les conséquences de cette hypothèse et aboutir à une contradiction irréfutable (comme $1 = 2$, ou 2 2 et 4 sont premiers entre eux). Vous allez en déduire que votre hypothèse de départ est nécessairement fausse, c'est à dire que la chose que vous vouliez démontrer n'est pas fausse, donc qu'elle est vraie.

Définition 0.5.2. *Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement logique. Il consiste*
- *soit à démontrer qu'une proposition P est vraie en prouvant l'absurdité de la proposition $\overline{P}$*
- *soit à démontrer qu'une proposition P est fausse en déduisants logiquement des conséquences absurdes.*

Voyons maintenant le raisonnement par l'absurde dans toute sa splendeur à travers l'un de ses exemples les plus classiques : l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.

Exemple 0.5.4. *On souhaite démontrer que la proposition P est vraie.*
P :«$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel »
On raisonne par l'absurde. On va donc montrer que la proposition $\overline{P}$ est absurde.
$\overline{P}$ se traduit par «$\sqrt{2}$ est un nombre rationnel »
$\sqrt{2}$ est rationnel, il peut se mettre sous la forme d'une fraction. C'est à dire
$\exists a \in \mathbb{Z},\ \exists b \in \mathbb{Z},\ \sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a et b premiers entre eux.On simplifie cette égalité :$\exists a \in \mathbb{Z},\ \exists b \in \mathbb{Z},\ 2 = \frac{a^2}{b^2}$ (on élève au carré)
$\exists a \in \mathbb{Z},\ \exists b \in \mathbb{Z},\ 2b^2 = a^2$ (par produit de b^2)
Donc a^2 est pair, donc a est pair. Donc $\exists k \in \mathbb{Z},\ a = 2k$ (propriété vue précédemment)
En remplaçant dans l'égalité précédente, on obtient
$\exists a \in \mathbb{Z},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 2b^2 = (2k)^2 \iff \exists a \in \mathbb{Z},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 2b^2 = 4k^2 \iff \exists a \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z},\ b^2 = 2k^2$.
Donc b^2 est pair, donc b est pair ce qui est impossible car a est pair et que a et b sont premiers entre eux. On aboutit à une contradiction.
Donc la proposition $\overline{P}$ est fausse. Donc $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Remarque 0.5.3. *Dans le cas où la proposition à démontrer est de la forme* $P \Longrightarrow Q$*, raisonner par l'absurde consiste à démontrer que la proposition* $P \wedge \overline{Q}$ *est fausse. Pour se faire, on suppose que* P *est vraie et que* Q *est fausse, on développe les conséquences et on montre que l'on arrive à une contradiction.*

Exercice
Démontrez que si vous rangez $(n+1)$ pulls dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant 2 pulls.
Exercice :
Montrez en utilisant un raisonnement par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2$ est pair$\Longrightarrow n$ est pair.

0.5.10 Loi de disjonction des cas

La proposition :$\big((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)\big) \Longrightarrow [(P \vee Q) \Longrightarrow R]$ est une loi logique.

Remarque 0.5.4. *Si la proposition* $(P \vee Q)$ *est vraie, alors pour prouver que* C *est vraie, on procède comme suit :*
On montre que $P \Longrightarrow C$ *et* $Q \Longrightarrow C$ *sont tous les deux vraie, et on déduit que* C *est vraie.*
Pratiquement, on applique $[(P \Longrightarrow C) \wedge (\overline{P} \Longrightarrow C)] \Longrightarrow C$.

Exercice
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - |x-1| + 1 = 0$

0.5.11 Le raisonnement par récurrence

Principe de récurrence

Proposition 0.5.1. *Soit* $P(n)$ *une propriété dépendant d'une variable entière naturelle. S'il existe un entier naturel* n_0 *tel que la proposition* $P(n_0)$ *est vraie, et si la proposition* $\forall n \geq n_0\ P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ *est vraie alors la proposition* $\forall n \geq n_0 : P(n)$ *est vraie.*

Définition 0.5.3. *Un raisonnement par récurrence permet de montrer qu'une propriété est vraie ou qu'elle est fausse pour tous les entiers à partir d'un certain "rang".*

La forme générale des propriétés que nous allons démontrer par récurrence est :
$\forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0, P(n)$.
Pour se faire il faudra démontrer les deux points si dessous :
- $P(n_0)$: C'est l'initialisation. On montre que la propriété est vérifiée au rang n_0.
- $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$:C'est l'hérédité. On montre que si la propriété est vraie au rang n, alors elle est vraie au rang $n+1$. (On montre une implication)

Pour terminer la démonstration, il suffit alors d'indiquer que d'après le principe de récurrence, ces deux conditions prouvent la propriété :

$$(\forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0, P(n)$$

.

Exemple 0.5.5. *Montrons que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1+2+3+4+.......+n = \frac{n(n+1)}{2}$
Notation
On note $1+2+3+4+.....+n$ *par* $\sum\limits_{k=1}^{k=n} k$ *(et on lit somme de* 1 *à* n*).*

Donc on écrit : $\sum\limits_{k=1}^{k=n} k = 1+2+3+4+.......+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Étape 1 : Initialisation
Montrons que la propriété est vraie pour $n = 1$.
On calcule séparément les deux termes de l'égalité.
$\sum_{k=1}^{k=n} k = 1$ *et* $n(n+1)2 = \frac{1\times 2}{2} = 1$. *Donc l'égalité est vérifiée au rang* $n = 1$.

Étape 2 : Hérédité
On suppose que pour un certain n, $\sum_{k=1}^{k=n} k = 1+2+3+4+.......+n = \frac{n(n+1)}{2}$ *(c'est à dire que* n *vérifie notre égalité). Montrons alors que* $\sum_{k=1}^{k=n+1} k = 1+2+3+4+.......+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *(c'est-à-dire que n+1 vérifie notre égalité).*
Pour écrire la deuxième expression, il suffit de substituer $n+1$ *à* n *dans la première expression. Puis, on démontre l'égalité :*
$\sum_{k=1}^{k=n+1} k = 1+2+3+4+.......+n+n+1 = (\sum_{k=1}^{k=n} k) + n + 1$ *(d'après la définition de la somme)* $\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{k=n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$ *(par hypothèse de récurrence)* $\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{k=n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *(on factorise) On obtient bien l'égalité demandée.*
On en déduit que si n vérifie l'égalité, alors n+1 vérifie aussi l'égalité.
Étape 3 : Conclusion
On conclue que d'après le principe de récurrence, l'égalité est vérifiée pour tous les n *différents de* 0.
C'est à dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

.